Ad
Soyad
No

Nümerik Analize Giriş Büt. 04.07.2022

1) $x^3+x-1=0$ denkleminin $[-1,1]$ aralığında bir tane kökünün olduğu biliniyor. $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2$ ve $h=1$ olduğuna göre bu denklemin kökünü uygun interpolasyon polinomu yardımıyla bulunuz.

2) $p(x)=e^{-x}$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere
$\int_{-1}^{-1/2} \frac{e^{-x}}{x}dx$ integralini $n=1$ için Gauss metodu ile hesaplayınız.

3) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=4$ olmak üzere $2^{-\frac{1}{2}}$ değerini interpolasyon polinomu yardımıyla hesaplayınız.

4) $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2$ $f(x_0)=2$, $x_1=1$, $P_{01}(x)=2x+1$, $P_{12}(0)=2$ olduğuna göre $P_{012}(0)=?$

5) $\int_{-9}^{-1} \frac{1}{3}\ln(1-x)dx$ integralinin Simpson yöntemiyle hesaplanmasında hatanın $\frac{9}{20}$ den küçük olması için $n=?$ bulunuz.

6) $f[x_{i-m},\dots,x_{i-1},x_i]=\dfrac{\nabla^m f_i}{h^m m!}$ olduğunu gösteriniz. $x_i=x_0+ih$ dir.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

Başarılar N.A.

N. Analize Giriş Büt. Çözümler 04.07.202

1) $f(x)=x^3+x-1$ alınırsa

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	-3	-1	1

olur. $f(x)=0$ olacak şekilde $x=?$ old.dan ters int. polinomu uyg. Bunun için

y_i	-3	-1	1
$f^{-1}(y_i)=x_i$	-1	0	1

alınır.

$$P_2^{-1}(y)=\frac{(y+1)(y-1)}{(-3+1)(-3-1)}\cdot(-1)+\frac{(y+3)(y-1)}{(-1+3)(-1-1)}\cdot 0+\frac{(y+3)(y+1)}{(1+3)(1+1)}\cdot 1$$

$$f^{-1}(0)\approx P_2^{-1}(0)=\frac{-1}{-2\cdot-4}(-1)+0+\frac{3}{4\cdot 2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$ $-1<y=0<1$ old. $0<1/2<1$ olmasından sonucun ~~doğru olduğunu gösterir~~ anlamlı olduğu görülür.

2) $p(x)=e^{-x}$ ağırlık fonk. $f(x)=\frac{1}{x}$ alınırsa $n=1$ old.dan

$$\int_{-1}^{-1/2} e^{-x}f(x)dx\approx c_1 f(x_1),\quad c_1=?\ x_1=?$$

$$c_1=\int_{-1}^{-1/2} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{-1}^{-1/2}=-e^{1/2}+e$$

$$c_1x_1=\int_{-1}^{-1/2} e^{-x}x\,dx=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_{-1}^{-1/2}=-(x+1)e^{-x}\Big|_{-1}^{-1/2}=-(-1/2+1)e^{1/2}+0$$

$$c_1x_1=-\tfrac{1}{2}e^{1/2}\Rightarrow x_1=\frac{-\frac{1}{2}e^{1/2}}{-e^{1/2}+e}$$ olur. O halde

$$\int_{-1}^{-1/2} e^{-x}\frac{1}{x}dx\approx\left(e-e^{1/2}\right)\cdot\frac{-e^{1/2}+e}{-\frac{1}{2}e^{1/2}}$$ olur.

$$\approx\frac{(e-e^{1/2})^2}{-\frac{1}{2}e^{1/2}}$$

4) $$P_{012}(0)=\frac{\begin{vmatrix}P_{01}(0) & x_0\\ P_{12}(0) & x_2\end{vmatrix}}{x_2-x_0}$$ dır. $P_{01}(x)=2x+1$ old.da $P_{01}(0)=1$ olur.

Diğer taraftan $P_{01}(x_0)=f(x_0)$ old.dan $f(x_0)=2$ verildiğinden

$2x_0+1=2\Rightarrow x_0=1/2$ $\quad x_i=x_0+ih$ ve $x_1=1$ old.dan $i=1$ için

$x_1=x_0+h\Rightarrow x_1-x_0=h$ dan $h=1-1/2=1/2$ olur. $x_0=1/2$, $x_1=1$ old.

$x_2=x_0+2h$ dan $x_2=1/2+2\cdot 1/2=3/2$ olur. O halde

$$P_{012}(0)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1/2\\ 2 & 3/2\end{vmatrix}}{3/2-1/2}=\frac{3/2-2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}}=\frac{1/2}{1}=1/2$$ olur. //

3) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $2^{-1/2}$ in hesaplanması istendiğinde $x^{1/2}=2^{-1/2} \Rightarrow x=1/2$ olur. O halde $f(1/2)=?$ istenmektedir.

x_i	0	1	4
$f(x_i)$	0	1	2

den ayrık noktalar eşit aralıklı olmadığından Lagrange, bölünmüş fark veya Neville ile hesaplanabilir.

$$f(1/2)\approx P_2(1/2)=\frac{(1/2-1)(1/2-4)}{(0-1)(0-4)}\cdot 0+\frac{(1/2-0)(1/2-4)}{(1-0)(1-4)}\cdot 1$$

$$+\frac{(1/2-0)(1/2-1)}{(4-0)(4-1)}\cdot 2=\frac{-1/2\cdot -7/4}{(-1)(-4)}\cdot 0+\frac{1/2\cdot(-7/4)}{1(-3)}\cdot 1$$

$$+\frac{1/2\cdot -1/2}{\cancel{4}_{2}\cdot 3}\cdot\cancel{2}=\frac{7}{24}-\frac{1}{12}=\frac{5}{24} \text{ olur.}$$

$0<1/2<1$ old.-da $0<\frac{5}{24}<1$ old. sonuç ~~doğrudur~~ anlamlıdır.

5) $\int_a^b f(x)dx$ için $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ olmak üzere

Simpson yönteminde hata için üst sınır $\dfrac{(b-a)^5 \cdot M_4}{n^4 \cdot 180}$ dir.

O halde $\dfrac{(b-a)^5 M_4}{n^4 \cdot 180} \leq \dfrac{9}{20}$ olacak şekilde $n=?$

$f(x) = \frac{1}{3}\ln(1-x)$, $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{-1}{1-x}$, $f''(x) = \frac{1}{3}\frac{-1}{(1-x)^2}$, $f'''(x) = \frac{1}{3}\frac{-2}{(1-x)^3}$

$f^{(4)}(x) = \frac{1}{\cancel{3}}\frac{-\cancel{6}}{(1-x)^4} = \frac{-2}{(1-x)^4}$ olur. O halde

$M_4 = \max\limits_{x\in[-9,-1]} \left|\frac{-2}{(1-x)^4}\right| = \frac{2}{(1-(-1))^4} = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}$

$b=-1, a=-9$ old. $b-a = -1+9 = 8$ olur. O halde

$\dfrac{(b-a)^5 \cdot M_4}{n^4 \cdot 180} \leq \dfrac{9}{20} \Rightarrow \dfrac{\cancel{8^5} \cdot \frac{1}{\cancel{8}}}{n^4 \cdot 180} \leq \dfrac{9}{20} \Rightarrow \dfrac{8^4}{\frac{9}{\cancel{20}} \cdot \cancel{180}} \leq n^4 \quad \left(\dfrac{8^4}{9 \cdot 9}\right)^{1/4} \leq n$

$\frac{8}{3} \leq n \Rightarrow 2{,}66 \leq n \Rightarrow n$ çift olmalıdır. $\underline{n=4 \text{ alınır.}}$

6) $f[x_{i-m}, \dots, x_{i-1}, x_i] = \dfrac{\nabla^m f_i}{h^m m!}$, $x_i = x_0 + ih$

$m=1$ için $f[x_{i-1}, x_i] = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{\nabla f_i}{h^1 \cdot 1!}$ old. $m=1$ için doğrudur.

$m \leq k$ için doğru olsun. Yani $f[x_{i-k}, \dots, x_{i-1}, x_i] = \dfrac{\nabla^k f_i}{h^k k!}$ olsun. $m=k+1$ için yani $f[x_{i-(k+1)}, \dots, x_{i-1}, x_i] = \dfrac{\nabla^{k+1} f_i}{h^{k+1}(k+1)!}$ old. göst. Bunun için,

$$f[x_{i-(k+1)}, \dots, x_{i-1}, x_i] = \frac{f[x_{i-k}, \dots, x_{i-1}, x_i] - f[x_{i-(k+1)}, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-(k+1)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\nabla^k f_i}{h^k k!} - \dfrac{\nabla^k f_{i-1}}{h^k k!}}{(k+1)h} = \frac{\nabla^k (f_i - f_{i-1})}{h^k \cdot k! \cdot h \cdot (k+1)} = \frac{\nabla^{k+1} f_i}{h^{k+1}(k+1)!}$$ olur.